ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 32, Nos. 2-3, 1979

SUR LA $\mathcal{K}$-ANALYTICITE DE CERTAINS ESPACES D'OPERATEURS

PAR
MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

This paper examines in which case the space of continuous operators of a Banach space E within a Banach space F is $\mathcal{K}$-analytic for the topology of strict, weak convergence.

Un espace topologique sera dit $\mathcal{K}$-analytique [1] s'il est image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact. La classe des espaces de Banach E qui sont $\mathcal{K}$-analytiques pour leur topologie faible $\sigma(E, E')$, et que nous appellerons des e.B. $\mathcal{K}$ pour simplifier, possède des propriétés tout-à-fait remarquables: [4], [5], [6].

C'est pourquoi (à la suite de diverses questions de E.G. Thomas) il nous semble interessant d'étudier quand l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs continus de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F ou certains sous-espaces de cet espace, sont $\mathcal{K}$-analytiques pour une topologie convenable. Comme il résultera de nos exemples, il faut pour qu'il en soit ainsi dans des cas non triviaux, choisir la topologie la moins fine possible. Nous munirons donc $\mathcal{L}(E,F)$ et ses sous-espaces de la topologie de la convergence ponctuelle faible, c'est à dire la moins fine des topologies rendant les applications $T \to f'(T(x))$ continues, pour $x \in E$ et $f \in F'$, autrement dit: $T_i \to T$ si pour tout $x \in E$ on a: $T_i(x) \to T(x)$ pour $\sigma(F, F)$.

Commençons par quelques résultats à peu près évidents.

Proposition I. *Si $\mathcal{L}(E,F)$ est $\mathcal{K}$-analytique, F est un* e.B. $\mathcal{K}$.

Preuve. En effet, si l'on fixe $l \in E'$, non nulle, il existe un plongement canonique $f \to \tilde{f}$ de F dans $\mathcal{L}(E, F)$, avec $\tilde{f}(x) = l(x)f$ pour $x \in E$. Le résultat en découle.

Received December 22, 1977

La proposition suivante est bien connue.

PROPOSITION 2. *Si F est réflexif, $\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathcal{K}$-analytique.*

En effet cet espace est K_σ puisque sa boule unité est compacte (toujours pour la topologie considérée).

PROPOSITION 3. *Si E est séparable et si F est un* e.B.$\mathcal{K}$, *$\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathcal{K}$-analytique.*

PREUVE. Une réunion dénombrable d'ensembles $\mathcal{K}$-analytiques étant $\mathcal{K}$-analytique, il suffit de prouver que la boule unité B de $\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathcal{K}$-analytique. Soit (e_n) une suite dense de E.

L'espace $F^{\mathbf{N}}$ étant $\mathcal{K}$-analytique pour la topologie produit des topologies faibles, il suffit de vérifier que l'application de B dans $F^{\mathbf{N}}$ qui envoie T sur $(T(e_n))$ est un homéomorphisme sur son image, et que cette image est fermée. Les détails sont standards et laissés au lecteur.

Désignons par $\mathcal{L}_f(E, F)$ l'ensemble des opérateurs qui sont limites en norme d'opérateurs de rang fini.

THÉORÈME 4. *Si F est un* e.B. $\mathcal{K}$, *$\mathcal{L}_f(E, F)$ est $\mathcal{K}$-analytique.*

PREUVE. Pour $e' \in E'$ et $f \in F$ définissons l'opérateur $T_{e',f}$ par $T_{e',f}(e) = e'(e)f$. L'application de $E' \times F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui envoie (e', f) sur $T_{e',f}$ est continue lorsque $E' \times F$ est muni de la topologie $\sigma(E', E) \times \sigma(F, F')$. Puisque $E' \times F$ est $\mathcal{K}$-analytique pour cette topologie, il s'ensuit que l'ensemble V des opérateurs de rang 1, qui est exactement l'image $E' \times F$, est $\mathcal{K}$-analytique. Puisque $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.t. on en déduit que l'ensemble S des opérateurs de rang fini, qui est l'espace vectoriel engendré par V, est $\mathcal{K}$-analytique. Désignons par A la boule unité de S. Elle est fermée dans S. L'espace $S \times A^{\mathbf{N}}$, muni de la topologie produit, est $\mathcal{K}$-analytique. Le résultat découle alors de ce que l'application de $S \times A^{\mathbf{N}}$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui envoie $(T, (T_n))$ sur $T + \Sigma_{n \geqq 1} 2^{-n} T_n$ est continue et que son image est $\mathcal{L}_f(E, F)$.

Si F possède la propriété d'approximation, $\mathcal{L}_f(E, F)$ est égal à l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des opérateurs compacts. On a donc

COROLLAIRE 5. *Si F est un* e.B. $\mathcal{K}$ *qui possède la propriété d'approximation, $\mathcal{L}_c(E, F)$ est $\mathcal{K}$-analytique.*

Ce corollaire implique bien sûr que $\mathcal{L}(E, F)$ lui-même est $\mathcal{K}$-analytique si de plus $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$ (par exemple si $F = l^1(\mathbf{N})$ et $E \not\supset l^1(\mathbf{N})$).

La proposition suivante montre, entre autres choses, que la méthode de la proposition 3 ne peut pas s'étendre au cas ou E n'est pas séparable.

PROPOSITION 6. *Soient I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques séparés non vides. Alors le produit $\Pi_{i\in I}X_i$ est $\mathcal{K}$-analytique pour la topologie produit si et seulement si tous les X_i sont compacts, sauf peut-être un nombre dénombrable d'entre eux qui sont $\mathcal{K}$-analytiques.*

PREUVE. Il est clair que la condition est suffisante. Si X est $\mathcal{K}$-analytique, tout sous-produit de la famille des X_i l'est encore. Il suffit donc de prouver que si I n'est pas dénombrable et si pour chaque i, X_i est $\mathcal{K}$-analytique non-compact, le produit X des X_i n'est pas $\mathcal{K}$-analytique.

Un espace $\mathcal{K}$-analytique étant de Lindelöf [3] est compact dès que toute suite possède une valeur d'adhérence. Chaque X_i n'étant pas compact contient ainsi un fermé infini, discret et donc X contient un fermé homéomorphe à $\mathbf{N}^I$.

Prouvons que cet espace n'est pas $\mathcal{K}$-analytique, par exemple qu'il n'est pas de Lindelöf:

Pour $j,k\in I$, soit $A_{j,k}=\{(n_i)\in\mathbf{N}^I;\ n_j=n_k\}$. C'est un ouvert de $\mathbf{N}^I$, et la réunion des $A_{j,k}$ est $\mathbf{N}^I$ (puisque I n'est pas dénombrable).

Mais il est clair que $\mathbf{N}^I$ n'est pas réunion d'une famille dénombrable de $A_{j,k}$.

c.q.f.d.

Le résultat suivant est un peu inattendu, puisque la proposition 6 montre que la méthode de la proposition 3 ne peut s'étendre au cas ou E n'est pas séparable.

THÉORÈME 7. *Soient E un espace de Banach contenant un compact faible total et F un espace de Banach contenant un sous-espace réflexif G tel que $(F/G)'$ soit séparable en norme. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est $\mathcal{K}$-analytique.*

PREUVE. Nous allons montrer plus précisément que la boule unité B de $\mathcal{L}(E,F)$ est un $F_{\sigma\delta}$ de la boule unité B'' de $\mathcal{L}(E,F'')$ (ou ce dernier espace est muni de la moins fine des topologies rendant continues les applications $T\to T(e)(f')$ pour $e\in E$, $f'\in F'$), ce qui suffira puisque B'' est compacte.

D'après [2], p. 152, théorème 5, il existe une partie totale $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que e_i converge faiblement vers 0 suivant le filtre des parties cofinies de I.

Soit D un disque faiblement compact total de F (par exemple l'enveloppe disquée faiblement fermée de la boule unité de G et d'une suite convergeante vers 0 dont l'image dans F/G est totale) et soit (f'_n) une suite dense en norme dans le polaire G^0 de G dans F' (qui est séparable en norme par hypothèse puisque $G^0=(F/G)'$).

Désignons par C la boule unité de F''. Pour des entiers n et p posons:

$$A_n^p = \left\{ T \in B''; \forall i \in I, \left(F(e_i) \in nD + \frac{1}{p} C \text{ ou } k \leqq p \Rightarrow |T(e_i)(f_k')| \leqq \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Puisque C et D sont compacts pour $\sigma(F'', F')$ l'ensemble $nD + (1/p)C$ est fermé dans F'' pour cette même topologie, donc A_n^p est fermé dans B''. Prouvons que $B = \bigcap_p \bigcup_n A_n^p$.

Soient $T \in B$ et p fixé. Puisque T est faiblement continu, on a $\lim_i f_k'(T(e_i)) = 0$ pour tout k. Il existe donc une partie finie J de I telle que pour $i \notin J$ on ait $|f_k'(T(e_i))| \leqq p^{-1}$ pour tout $k \leqq p$. D'autre part, $\bigcup_n nD$ est un sous-espace vectoriel de F (puisque D est un disque) qui est dense puisque D est total. Il existe donc un entier n tel que pour $i \in J$ on ait $T(e_i) \in nD + p^{-1}C$. Ceci montre que $T \in A_n^p$ et donc que $B \subset \bigcap_p \bigcup_n A_n^p$.

Pour prouver l'inclusion inverse, il suffit de montrer que si $T \in \bigcap_p A_{n_p}^p$ pour une suite n_p, alors $T \in B$.

Puisque la famille $(e_i)_{i \in I}$ est totale, que T est continu en norme, et que F est fermé en norme dans F'', pour prouver que T est à valeurs dans F, il suffit de prouver que pour tout i on a $T(e_i) \in F$. Fixons $i \in I$; par définition de A_n^p on a:

$$\forall p \in \mathbf{N}, \left(T(e_i) \in n_p D + \frac{1}{p} C \right) \quad \text{ou} \quad \left(k \leqq p \Rightarrow |T(e_i)(f_k')| \leqq \frac{1}{k} \right).$$

Deux cas sont possibles. Tout d'abord, s'il existe une sous-suite (p_l) telle que pour tout entier l on ait $T(e_i) \in n_{p_l} D + p_l^{-1} C$, on a $T(e_i) \in \bigcap_l (F + p_l^{-1} C)$, puisque $D \subset F$. Puisque F est fermé en norme dans F'', on a donc $T(e_i) \in F$. Si une telle suite n'existe pas, pour p assez grand on a $|T(e_i)(f_k')| \leqq p^{-1}$ pour tout $k \leqq p$, et donc $T(e_i)(f_k') = 0$ pour tout k. La suite (f_k') étant dense dans le polaire G^0 de G, ceci montre que $T(e_i)$ appartient au bipolaire de G dans F'', qui n'est autre que G puisque G est réflexif. c.q.f.d.

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse que G est réflexif par celle, plus faible, que le bipolaire de G dans F'' est contenue dans F, i.e. que la boule unité de G est relativement faiblement compacte dans F.

Nous allons maintenant donner des exemples pour montrer que les résultats précédents ne sont guère améliorables.

Exemple 8. Soit I un ensemble non dénombrable. Alors $l_2(I)$ est réflexif et $c_0(I)$ est un e.B. $\mathscr{K}$ (comme il résulte du fait qu'il contient un compact faible total [5]). Pourtant $\mathscr{L}(l_2(I), c_0(I))$ n'est pas $\mathscr{K}$-analytique.

Preuve. Soit (e_i) la base canonique de $l_2(I)$. L'espace $c_0(I)$ est isomorphe à $c_0(\mathbf{N} \times I)$. Pour chaque suite $s = (s_i) \in \mathbf{N}^I$ considérons l'opérateur T_s donné par

$T_s(e_i) = f_i$, ou $f_i(n, j) = 1$ pour $j = i$ et $n \leqq s_i$, et zéro sinon. On voit sans peine que l'application $s \to T_s$ est un homéomorphisme sur son image et que cette image est fermée, d'où la conclusion d'après la proposition 6.

EXEMPLE 9. Soit I un ensemble non dénombrable. Alors $\mathscr{L}(l_1(I), c_0(\mathbf{N}))$ n'est pas $\mathscr{K}$-analytique. Il était donc bien nécessaire de faire une hypothèse sur E dans le théorème 7.

PREUVE. En effet, si B désigne la boule unité de $c_0(\mathbf{N})$ munie de la topologie faible, cette boule n'est pas compacte; donc la boule unité de $\mathscr{L}(l_1(I), c_0(\mathbf{N}))$, qui est homéomorphe à B^I, n'est pas $\mathscr{K}$-analytique d'après la proposition 6.

EXEMPLE 10. Soit I un ensemble non dénombrable. Alors $l_2(I)$ est réflexif. Mais quoique $\mathscr{C}([0, 1])$ soit séparable, $\mathscr{L}(l_2(I), \mathscr{C}([0, 1]))$ n'est pas $\mathscr{K}$-analytique. Il ne suffirait donc pas de supposer F/G séparable dans le théorème 7.

PREUVE. Elle est sensiblement plus délicate que celle des deux énoncés précédents. Désignons par B la boule unité de $\mathscr{C}([0, 1])$, munie de la topologie faible. Désignons par D le sous-ensemble de B^I formé des familles $(\varphi_i)_{i \in I}$ de B telles que $\varphi_i \varphi_j = 0$ pour $i \neq j$. (Une telle famille ne possède qu'au plus un nombre de composantes non nulles.) Désignons par $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de $l_2(I)$. Pour $\varphi \in D$ on peut définir un opérateur continu T_φ de $l_2(I)$ dans $\mathscr{C}([0, 1])$ par $T\varphi(e_i) = \varphi_i$.

L'application $\varphi \to T_\varphi$ est un homéomorphisme sur son image, et cette image est fermée, comme on le voit sans peine. Il suffit donc de prouver que D n'est pas $\mathscr{K}$-analytique:

Désignons par C la boule unité de $\mathscr{C}([0, 1])$ munie cette fois de la topologie de la convergence ponctuelle. Nous allons en fait prouver que D n'est pas $\mathscr{K}$-analytique pour la topologie induite par C^I (ce qui suffit puisque cette topologie est moins fine que la topologie originelle). Soit K un espace compact contenant C (par exemple $[-1,1]^{[0,1]}$).

Désignons par Σ (resp. S) l'ensemble des suites infinies (resp. finie) d'entiers positifs. Pour $s \in S$ et $\sigma \in \Sigma$, notons $s < \sigma$ le fait que s soit le début de σ. Si D est $\mathscr{K}$-analytique, on peut l'écrire [1]

$$D = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{s < \sigma} X_s$$

où pour chaque s, X_s est un fermé de K^I. Désignons par $\bar{D}$ l'adhérence de D dans K^I, et par π_i la projection de K^I sur le facteur de rang i. Posons, pour $s \in S$

$$Y_s = \bar{D} \cap \prod_{i \in I} (\pi_i(X_s) \cup \{0\}).$$

C'est un fermé de K^I. Prouvons que $D = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{s<\sigma} Y_s$. Il est clair que $D \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{s<\sigma} Y_s$. Puisque $\bar{D} \cap C^I = D$, il suffit de prouver que pour tout $\sigma \in \Sigma$ on a $\bigcap_{s<\sigma} Y_s \subset C^I$. Mais puisque $\bigcap_{s<\sigma} X_s \subset C^I$, on a:

$$\bigcap_{s<\sigma} Y_s \subset \bigcap_{s<\sigma} \prod_{i \in I} (\pi_i(X_s) \cup \{0\}) = \prod_{i \in I} \left(\pi_i\left(\bigcap_{s<\sigma} X_s\right) \cup \{0\}\right) \subset C^I.$$

Pour toute suite finie s, posons $D_s = \bigcup_{s<\rho} \bigcap_{t<\rho} Y_t$. Nous allons construire par induction une suite (V_n) d'intervalles ouverts de $[0, 1]$, une suite décroissante de sous-ensembles (I_n) de I et une suite (k_n) d'entiers, telle que si on pose $s_n = (k_1, \cdots, k_n)$ les conditions suivantes soient vérifiées:

(a) $\bar{V}_n \subset V_{n-1}$.

(b) $I \setminus I_n$ est dénombrable.

(c) Toute famille $\varphi \in D$ telle que $\operatorname{supp} \varphi_i \subset V_n$ pour tout i et que $\varphi_i = 0$ si $i \notin I_n$, appartient à D_s.

Pour cela posons $V_0 = [0, 1]$, $I_0 = I$, $s_0 = \varnothing$, puis supposons la construction effectuée jusqu'au rang n. Soit (V_k) une suite d'intervalles ouverts disjoints, l'adhérence de chacun d'eux étant contenue dans V_n. Pour chaque entier k désignons par t_k la suite finie obtenue en rajoutant à s_n un $(n+1)$ ième terme égal à k.

Si le choix de I_{n+1}, V_{n+1}, k_{n+1} est impossible, on peut construire par induction des parties dénombrables disjointes L_k de I_n, et des familles φ^k de D telles que $\varphi^k \notin D_{t_k}$, que $\varphi_i^k = 0$ pour $i \notin L_k$ et que $\operatorname{supp} \varphi_i^k \subset V_k$ pour tout i et tout k. Soit φ l'élément de D donné par $\varphi_i = \varphi_i^k$ si $i \in L_k$ et $\varphi_i = 0$ sinon.

La condition (c) montre que $\varphi \in D_{s_n}$. Puisque $D_{s_n} = \bigcup_k D_{t_k}$, il existe k tel que $\varphi \in D_{t_k}$, donc $\sigma \in \Sigma$ telle que $t_k < \sigma$ et que $\varphi \in \bigcap_{s<\sigma} Y_s$. La définition de Y_s montre que $\varphi^k \in \bigcap_{s<\sigma} Y_s$. On a donc $\varphi^k \in D_{t_k}$, ce qui est absurde et termine la construction.

L'ensemble $\bigcap_n I_n$ n'est pas vide puisque son complémentaire est au plus dénombrable. Soit i un point de cet ensemble, σ la suite (k_n) et ψ_n une suite de fonctions de $\mathscr{C}([0, 1])$ telles que $0 \leqq \psi_n \leqq 1$, avec ψ_n égal à 1 sur V_{n+1} et 0 en dehors de V_n. La condition (c) implique que $\psi_n \in \pi_i(D_{s_n}) \subset \pi_i(Y_{s_n})$ pour tout n. Puisque $\bigcap_{s<\sigma} \pi_i(Y_{s_n}) = \pi_i(\bigcap_{s<\sigma} Y_{s_n}) \subset B$, toute valeur d'adhérence de la suite ψ_n dans K appartient à B, donc la suite ψ_n possède une valeur d'adhérence continue, ce qui est absurde. c.q.f.d.

Pour conclure, voici un exemple montrant que l'on ne peut guère obtenir de résultats pour des topologies plus fines que celle que nous avons envisagée.

Désignons par τ la topologie de la convergence ponctuelle en norme sur

$\mathscr{L}(E,F)$, c'est à dire la moins fine des topologies rendant continues les applications $T \to \|T(x)\|$ où $x \in E$. La méthode de la proposition 3 prouve que *$\mathscr{L}^\tau(E,F)$ est $\mathscr{K}$-analytique si E et F sont séparables*, et celle du théorème 4 que *$\mathscr{L}_f^\tau(E,F)$ est $\mathscr{K}$-analytique si F est séparable.*

EXEMPLE 11. Si I n'est pas dénombrable, $\mathscr{L}^\tau(l_2(I), l_2(\mathbf{N}))$ n'est pas $\mathscr{K}$-analytique.

PREUVE. Désignons par $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de $l_2(I)$ et par (f_n) celle de $l_2(\mathbf{N})$. Posons $g_n = f_n$ si $n > 0$, $g_0 = 0$. Soit D le sous-ensemble de $\mathbf{N}^I$ défini par:

$$d = (d_i)_{i\in I} \in D \Leftrightarrow (\forall i,j \in I, i \neq j \Rightarrow (d_i \neq d_j \text{ ou } d_i = d_j = 0)).$$

A chaque élément d de D associons l'opérateur T_d de $\mathscr{L}(l_2(I)l_{\mathbf{N}}(I))$ donné par $T_d(e_i) = g_{d_i}$. L'application $d \to T_d$ est un homéomorphisme sur son image, laquelle est fermée.

Il suffit de montrer que D n'est pas $\mathscr{K}$-analytique. Or D n'est pas de Lindelöf. En effet, si V_i désigne l'ensemble des éléments de D tels que $d_i = 0$, on a $D = \bigcup_i V_i$, quoique aucune famille dénombrable de V_i ne recouvre D. c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol. I, W. A. Benjamin, New York, 1969.
2. J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces*, Lectures Notes **485**, Springer Verlag,
3. M. Sion, *On analytic sets in topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 341–354.
4. M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **284** (1977), 745–748.
5. M. Talagrand, *Sur les espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **285** (1977), 119–222.
6. M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, à paraître.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS VI
75230 PARIS, CEDEX 05, FRANCE